Concours des 28, 29 et 30 mai 1980 d'admission en 1ère année à l'INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS

(Option M)

***

MATHEMATIQUES

(à distribuer aux candidats)

Les candidats n'ont pas à recopier l'énoncé sur leur feuille de composition

1ère PARTIE

Soit G un groupe fini. On appelle ordre de G le cardinal de l'ensemble de ses éléments, et ordre d'un élément a de G l'ordre du sous-groupe engendré par a, c'est-à-dire du plus petit sous groupe contenant a.

1°) Soit H un sous-groupe de G. Montrer que la relation R(x, y) définie par "il existe un élément a de H tel que y = a x " est une relation d'équivalence sur G. En déduire la relation qui relie l'ordre de H à l'ordre de G.

2°) Soit A le sous-groupe de G engendré par a, et n l'ordre de a.

Montrer que les n premières puissances de a, c'est-à-dire a, a^2, ..., a^n sont toutes distinctes et que a^n est égal à l'élément neutre e de G A est-il commutatif ?

3°) On désigne par Q un groupe d'ordre 8 non commutatif et possédant un unique élément d'ordre 2 noté e'. Pour tout a élément de Q on posera a' = e'a. Montrer que e' commute avec tout élément de Q.

Soient j et k deux éléments de Q ne commutant pas. On pose j k = ℓ

Montrer que Q a pour ensemble d'éléments $\{e, j, k, \ell, e', j', k',$ et déterminer la table du groupe Q.

2ème PARTIE

1°) Trouver un homomorphisme injectif ϕ du groupe Q dans le groupe multiplicatif M_2^* des matrices carrées régulières d'ordre 2 à coefficients complexes et qui vérifie :

- que $\phi(k)$ est une matrice réelle de rotation
- et que $\phi(j)$ est une matrice diagonale.

En particulier déterminer I, J, K, L images respectives par ϕ de e, j, k, ℓ.

NOTA : on ne demande pas de décrire tous les homomorphismes répondant à la question mais d'en exhiber un. Dans toute la suite I, J, K, L seront alors relatifs à l'homomorphisme ϕ choisi, ce choix n'ayant aucune incidence sur les réponses aux questions qui suivent.

2°) Considérant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, on appelle H le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé par les combinaisons linéaires à coefficients réels des 8 matrices qui constituent l'image $\phi(Q)$ de ϕ.

Montrer que I, J, K et L forment une base de H et que le produit matriciel définit une loi interne sur H, ce qui fait donc de H une $\mathbb{R}$-algèbre.

3°) Etant donné un élément X = aI + bJ + cK + dL de H, on dit que le nombre réel a est la "partie scalaire" de X qu'on notera Re(X), et que le vecteur $\vec{V}$ de composantes b, c, d sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la "partie vectorielle" de X qu'on notera Ve(X).

On considèrera $\mathbb{R}^3$ comme un espace vectoriel euclidien et orienté, et sa base canonique comme orthonormale et directe. En identifiant (ce qu'on pourra faire dans toute la suite du problème) X au couple $(a, \vec{V})$ et $X' = a'I + b'J + c'K + d'L$ au couple $(a', \vec{V}')$, montrer que le produit XX' de deux éléments X et X' de H peut s'exprimer simplement en fonction des nombres a, a', $\vec{V}.\vec{V}'$ (produit scalaire de $\vec{V}$ et $\vec{V}'$) et des vecteurs $\vec{V}$, $\vec{V}'$ et $\vec{V} \wedge \vec{V}'$ (produit vectoriel de $\vec{V}$ par $\vec{V}'$) .

4°) Montrer qu'à chaque élément X de H on peut associer un unique élément de H appelé conjugué de X et noté $\overline{X}$, tel que :

- pour tout X $Ve(X + \overline{X}) = 0$ et $Ve(X.\overline{X}) = 0$
- si $Ve(X) = 0$ alors $\overline{X} = X$

On pose alors $Re(X\overline{X}) = N(X)$

Montrer que :

- N(X) est un réel positif ou nul
- H est un corps
- $N(XX') = N(X).\ N(X')$
- $\|X\| = \sqrt{N(X)}$ est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel H.

5°) Soit F un endomorphisme de la $\mathbb{R}$-algèbre H distinct de l'endomorphisme nul.

Montrer successivement que :

- F est injective
- $F(\overline{X}) = \overline{F(X)}$
- $N[F(X)] = N(X)$
- $Re\,[F(X)] = Re\,(X)$
- il existe une unique rotation sur $\mathbb{R}^3$ notée $\hat{F}$ telle qu'en identifiant $X = aI + bJ + cK + dL$ au couple $(a, \vec{V})$ on ait pour tout X élément de H : $F(a, \vec{V}) = \left(a, \hat{F}(\vec{V})\right)$
- l'application qui à F associe $\hat{F}$ est un isomorphisme de groupe multiplicatif.

6°) A tout élément non nul S de H on associe l'opérateur noté F_S de H dans H qui à tout X associe le produit $S.X.S^{-1}$.

Montrer que F_S est un endomorphisme non nul de la $\mathbb{R}$-algèbre H auquel on associera, d'après le résultat de la question précédente, la rotation $\hat{F}_S$ sur $\mathbb{R}^3$.

Montrer que l'application ψ qui à tout S non nul associe $\hat{F}_S$ est un homomorphisme de groupe du groupe multiplicatif H* du corps H dans le groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$, et que ψ est surjective mais non injective.

On pourra d'abord établir que si $S = (a, \vec{V})$ alors $\hat{F}_S$ laisse le vecteur $\vec{V}$ invariant.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail